2021 年山东专升本高等数学（一）真题及答案

一、单项选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，则$x=2$是函数$f(x)$的( )

答案：A

解：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$，所以$x=2$是$f(x)$的可去间断点.

2.答案：D

解：

$$\because f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1, f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

3.答案：B

解：微分方程阶的定义，微分方程中所含未知函数的导数的最高阶数

4.答案：B

解：A. $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|=\dfrac{|\sin n|}{n^2}\le\dfrac{1}{n^2}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$收敛，故原级数绝对收敛.

B. $\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$发散，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$满足莱布尼兹定理条件$|u_n|\ge|u_{n+1}|$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$收敛，因此条件收敛；

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-\dfrac{2}{3})^n\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{3})^n$公比 q=$\frac{2}{3}$的等比级数，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-\dfrac{2}{3})^n\right|$收敛，故原级数绝对收敛；

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n\neq0$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$发散.

解：由 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 2\cos\theta\le r\le 4\cos\theta$ 知，积分区域为 $(x-1)^2+y^2=1, (x-2)^2+y^2=4, y=0$ 所围成图形在第一象限的部分，将二重积分由极坐标转化为平面直角坐标系下的积分.

二、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, |x|>1\\ 0, |x|\le 1\end{cases}$，则 $f[f(2021)]=$ ________.

答案：0

解：$f[f(2021)]=f\left(\frac{1}{2021}\right)=0.$

7. 点 $(1,2,3)$ 到平面 $2x+y-2z+4=0$ 的距离是__________.

答案：$\frac{2}{3}$

解：$d=\dfrac{|2\times1+2-2\times3+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{3}$. 故应填 $\dfrac{2}{3}$.

8.向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)$与$\boldsymbol{\beta}=(1,\sqrt{2},1)$的夹角是________.

答案：$\frac{\pi}{4}$

解：$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}=\frac{1\times 1+0\times\sqrt{2}+1\times 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^1+\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故$\theta$

$=\frac{\pi}{4}$. 故应填$\frac{\pi}{4}$.

9.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}x^n$的收敛半径为________.

答案：$\frac{1}{3}$

解：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\quad}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\quad}{n(n+1)}\cdot\frac{\quad}{3^{n+1}}\right|=\frac{\quad}{3}$.

10.答案：2

解：因为$f(|x|)$是偶函数，所以$\int_{-1}^{1}f(|x|)\,dx=2\int_{0}^{1}f(x)\,dx=2$.

三、计算题（本题共 7 个小题，每题 6 分，共 42 分）

11.求极限$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x$.

解：$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^3}{e}=e^2$.

12.求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{\sin x^3}$.

解：$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

13.求不定积分$\int\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$.

解：$\int\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx=-\int\ln\left(1+x^2\right)d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)+2\int\frac{1}{1+x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)+2\arctan x+C$.

14. 过点(1,0,1)与平面$x+y-z=0$ 和 $2x+z+1=0$ 平行的直线方程.

解：两平面的法向量为$\boldsymbol{n_1}=(1,1,-1)$, $\boldsymbol{n_2}=(2,0,1)$, 所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,-3,-2)$$, 又直线过点(1,0,1)，

所以所求直线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

15. 求微分方程$y''-4y'+7y=0$ 的通解.

解：特征方程：$r^2-4r+7=0$, 解得特征根为$r_1=2+\sqrt{3}i, r_2=2-\sqrt{3}i$,

所以原方程的通解为$y=e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$, ($C_1, C_2$为任意常数).

16. 已知函数$z=f(u,v)$可微，而$u=x\arcsin y, v=\dfrac{y}{x}$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot\arcsin y+f_2'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=f_1'\arcsin y-\dfrac{y}{x^2}f_2'$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}+f_2'\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}f_1'+\dfrac{1}{x}f_2'$.

17. 算二重积分$\iint\limits_D(2x+y)\,dxdy$共中$D$是由直线$y=3, y=x$与曲线$xy$

$=1$ 所围的闭区间.

$$解：\iint\limits_D(2x+y)\,dxdy=\int_1^3 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}(2x+y)\,dx=\int_1^3[x^2+yx]_{\frac{1}{y}}^{y}dy$$

$$=\int_1^3\left(2y^2-\frac{1}{y^2}-1\right)dy$$

$$=[\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{y}-y]_1^3=\frac{44}{3}.$$

四、解答题（第 18 题 6 分，第 19 题 8 分，共 14 分）

18. 求由直线$x=0, x=2, y=0$ 和曲线y

$=e^x$所围成的图形绕x轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解：$V=\displaystyle\int_0^2\pi(e^x)^2\,dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^2=\frac{\pi}{2}(e^4-1)$.

19. 设$k>0$, 求函数$f(x)$

$=\ln(1+x)+kx^2-x$的极值点，并判断其是极大值点还是极小值点.

解：定义域$(-1,+\infty)$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+2kx-1=\frac{1+2kx(1+x)-1-x}{1+x}=\frac{x(2kx+2k-1)}{1+x},$$

令$f'(x)=0$, 得驻点$x_1=0, x_2=\frac{1}{2k}-1$,

由$\frac{1}{2k}-1=0$，得$k=\frac{1}{2}$，这时$f'(x)=\frac{x^2}{1+x}\geq 0$（且"="仅在 $x=0$ 时成立），无极值点，

当 $0<k<\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{2k}-1>0$，当$k>\frac{1}{2}$时，$-1<\frac{1}{2k}-1<0$，

列表：

当 $0<k<\frac{1}{2}$时

x	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{2k}-1)$	$\frac{1}{2k}-1$	$(\frac{1}{2k}-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单增	极大值	单减	极小值	单增

当$k>\frac{1}{2}$时

x	$(-1,\frac{1}{2k}-1)$	$\frac{1}{2k}-1$	$(\frac{1}{2k}-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单增	极大值	单减	极小值	单增

综上所述，当 $0<k<\frac{1}{2}$时，$x=0$ 是极大值点，$x=\frac{1}{2k}-1$ 是极小值点，

当$k=\frac{1}{2}$时，无极值点，

当$k>\frac{1}{2}$时，$x=\frac{1}{2k}-1$ 是极大值点，$x=0$ 是极小值点

五、证明题（第 20 题 6 分，第 21 题 8 分，共 14 分）

20. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)\neq 0, 0<f(1)<1$, 证明存在x_0

$\in(0,1)$，使得$f^2(x_0)=x_0$.

证：设$F(x)=f^2(x)-x$, 则$F(x)$在$[0,1]$上连续，

五、证明题（第 20 题 6 分，第 21 题 8 分，共 14 分）

20. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0) \neq 0, 0 < f(1) < 1$, 证明存在$x_0 \in (0,1)$，使得$f^2(x_0) = x_0$.

证：设$F(x) = f^2(x) - x$, 则$F(x)$在$[0,1]$上连续，

且$F(0) = f^2(0) > 0, F(1) = f^2(1) - 1 < 0$,

由零点定理可得，至少存在一点$x_0 \in (0,1)$, 使得$F(x_0) = 0$, 即$f^2(x_0) = x_0$.

21. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0) = 0, f(1) = 1$,

(1)存在$\xi_1 \in (0,1)$, 使得$f'(\xi_1) = 2\xi_1$.

(2)存在$\xi_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \xi_3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使$f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 2(\xi_2 + \xi_3)$.

证：设$F(x) = f(x) - x^2$, 则$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导, 且$F(0) = f(0) - 0 = 0$,

$F(1) = f(1) - 1 = 0, F'(x) = f'(x) - 2x$,

(1)由罗尔定理可得, 存在$\xi_1 \in (0,1)$, 使得$F'(\xi_1) = 0$, 即$f'(\xi_1) - 2\xi_1 = 0$, 也即$f'(\xi_1) = 2\xi_1$.

(2)在$\left[0, \frac{1}{2}\right]$上对$F(x)$用拉格朗日中值定理，存在$\xi_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，使得

$$F'(\xi_2) = \frac{F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)}{\frac{1}{2}} = 2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

在$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上对$F(x)$用拉格朗日中值定理，存在$\xi_3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得

$$F'(\xi_3) = \frac{F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = -2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

所以$F'(\xi_2) + F'(\xi_3) = 2F\left(\frac{1}{2}\right) - 2F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$，

所以$f'(\xi_2) - 2\xi_2 + f'(\xi_3) - 2\xi_3$，即$f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 2(\xi_2 + \xi_3)$. 命题得证.