# 2021年山东专升本高等数学（二）真题及答案

## 一、单项选择题（本题共5个小题，每小题3分，共15分）

1. 已知函数$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$，则$x=2$是$f(x)$的（　　）

A.连续点　B.可去间断点　C.跳跃间断点　D.无穷间断点

**答案：D**

解：因为$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty.$

所以$x=2$是$f(x)$的无穷间断点.

2. 微分方程$(y'')^2+x^2y'+y^3=0$的阶数是（　　）

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

**答案：B**

解：微分方程中未知函数的导数的最高阶数，称为微分方程的阶

方程中未知函数的导数的最高阶数是2。故应选B

3. 曲线$y=x^3-3x^2+3$的拐点（　　）

A. $(-1,-1)$　B. $(0,3)$　C. $(1,1)$　D. $(2.-1)$

**答案：C**

解：$y'=3x^2-6x, y''=6x-6$, 令$y''=0$得$x=1$, 把$x=1$代入方程可得

$y=1$. 所以拐点为$(1,1)$. 故应选C.

4. 已知函数$z=\dfrac{\sin(xy)}{y}$，则$\dfrac{d^2z}{dxdy}=$（　　）

A. $-x\sin(xy)$　B. $x\sin(xy)$　C. $-x\cos(xy)$　D. $x\cos(xy)$

**答案：A**

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\cos(xy)}{y}\cdot y=\cos(xy)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sin(xy)\cdot x=-x\sin(xy)$.

5. 已知$f(x)$为$[1,+\infty)$上的连续函数，且$F(x)=\int_1^{x^2}\dfrac{f(t)}{t}dt, x\in[1,+\infty)$, 则$F'(x)$

$=$（　　）

A. $2f(x)$　B. $2xf(x^2)$　C. $\dfrac{f(x^2)}{x^2}$　D. $\dfrac{2f(x^2)}{x}$

**答案：D**

答案：2

解：$F^{'}(x)=\frac{f(x^2)}{x^2}\cdot 2x=\frac{2f(x^2)}{x}$.

## 二、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1,\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+2b_n)=$________.

**答案：5**

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+2b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2+2\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1+4=5$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x}\right)^x=2$，则 $a=$________.

**答案：$-\ln 2$**

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\left(-\frac{x}{a}\right)\cdot(-a)}=e^{-a}=2$, 所以 $a=-\ln 2$.

8. 曲线 $xy+\ln y-1=0$ 在点 $(1,1)$ 处的法线方程是__________.

**答案：$y=2x-1$**

解：方程两边同时对 $x$ 求导得，$y+xy^{'}+\frac{1}{y}y^{'}=0$, 把 $(1,1)$ 代入得 $y^{'}=-\frac{1}{2}$,

故法线斜率 $k=2$, 法线方程：$y-1=2(x-1)$, 即 $y=2x-1$.

9. 直线$x=4, y=0$ 与曲线$y=\sqrt{x}$所围成的图形的面积$S=$________.

答案：$\mathbf{\frac{16}{3}}$

解：$S=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{16}{3}$.

10. 已知函数$f(x,y)$在$\mathrm{R}^2$上连续，设$I$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$$

则交换积分次序后$I=$________.

答案：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$

解：由$y=1-\sqrt{1-x^2}$可得$x^2+(y-1)^2=1$,此曲线是圆点是(0,1)，半径是1的圆的下半部分，由$y=\sqrt{2-x^2}$可得$x^2+y^2=2$,此曲线是圆点是(0,0)，半径是$\sqrt{2}$的圆的上半部分，交换积分次序后$\begin{cases}\sqrt{1-(y-1)^2}\le x\le\sqrt{2-y^2}\\ 0\le y\le 1\end{cases}$,所以

$$I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

## 三、计算题（本题共 9 个小题，每题 7 分，共 63 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x-1}-x\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2-x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2-x^2+x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=1.$

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\tan x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\sec^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{-\tan^2 x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x^2}=-3.$

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{\sqrt{1+x}-1}, x>0\\ 2b+1,\ x=0\\ b+2\cos x, x<0\end{cases}$ 在$x=0$ 处连续，求实数$a,b$.

解：$f(0)=2b+1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax}{\frac{1}{2}x}=2a,$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(b+2\cos x)=b+2,$

因为$f(x)$在$x=0$ 连续，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，所以 $2a=b+2$

$=2b+1$，可解得$a=\dfrac{3}{2}, b=1$.

14. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}dx$

解：$\displaystyle\int\frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{1+4\sin^2 x}d\sin x \xlongequal{令t=\sin x}\int\frac{t^2}{1+4t^2}dt$

$\displaystyle=\int\frac{t^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{1+4t^2}dt$

$\displaystyle=\int\frac{1}{4}dt-\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+4t^2}dt=\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(2t)^2}d(2t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\arctan 2t+C$

$=\dfrac{1}{4}\sin x-\dfrac{1}{8}\arctan(2\sin x)+C$

15. 求定积分 $\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}}dx$.

解：令$t=\sqrt{2x-1}$，则$x=\dfrac{t^2+1}{2}$，当$x=1$时，$t=1$，当$x=5$时，$t=3$.

$dx=tdt$.

原式 $=\int_1^3 te^t\,dt=\int_1^3 t\,de^t=te^t|_1^3-\int_1^3 e^t\,dt=3e^3-e-e^t|_1^3$

$=3e^3-e-(e^3-e)=2e^3$.

16. 求微分方程 $2ydy-(1+\cos x)(1+y^2)dx=0$ 在条件$y|_{x=0}=0$

条件下的特解.

解：方程分离变量为$\dfrac{2y}{1+y^2}dy=(1+\cos x)dx$

两边同时积分$\int\dfrac{2y}{1+y^2}dy=\int(1+\cos x)dx$

$$\int\frac{1}{1+y^2}d(1+y^2)=\int(1+\cos x)dx$$

$$\ln|1+y^2|=x+\sin x+C_1$$

$$|1+y^2|=e^{x+\sin x+C_1}$$

$$|1+y^2|=e^{C_1}e^{x+\sin x}$$

$$1+y^2=Ce^{x+\sin x}$$

故，$y^2=Ce^{x+\sin x}-1$

把$y|_{x=0}=0$代入得，$C=1$，所以原方程得特解为：$y^2=e^{x+\sin x}-1$.

17. 求$f(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3+2x-3xy+\dfrac{3}{2}y^2$的极值.

解：由$\begin{cases}f'_x=x^2+2-3y=0\\ f'_y=-3x+3y=0\end{cases}$得驻点(1,1)(2,2).

$f_{xx}=2x, f_{xy}=-3, f_{yy}=3,$

驻点为$(1,1)$时，$A=2, B=-3, C=3, AC-B^2=-3<0$，无极值；

驻点为$(2,2)$时，$A=4, B=-3, C=3, AC-B^2=3>0$，且$A>0$，

所以$f(x,y)$在$(2,2)$点取得极小值，极小值$f(2,2)=\frac{2}{3}$.

18. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$，其中$D$是由直线$y=x, y=4x$与曲线 $xy=1$ 围成的在第一象限内的闭区间.

解：$\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{4x} (x+2y)\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_x^{\frac{1}{x}} (x+2y)\,dy$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} [xy+y^2]_x^{4x}\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} [xy+y^2]_x^{\frac{1}{x}}\,dy$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} 18x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1+\frac{1}{x^2}-2x^2\right) dx$

$= 18\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} + [x-\frac{1}{x}-\frac{2}{3}x^3]\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{3}.$

19.生产某种设备的固定成本为 1000 万元，每生产一台设备，成本增加 20 万元，已知需求价格函数为$P(Q)=200-Q$，问销售量$Q$为多少时，总利润$L$达到最大，最大利润是多少？

解：总利润函数：

$L(Q)=QP-C=Q(200-Q)-20Q-1000=-Q^2+180Q-1000$

令$L'(Q)=-2Q+180=0$，得$Q=90$，$L''(90)=-2<0$

故$Q=90$ 为极大值点，也是最大值点，即当产量$Q=90$ 时，

总利润$L$达到最大，最大利润为$L(90)=7100$(万元).

## 四、证明题（本题共 1 个小题，共 7 分）

20. 设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$,

证明：存在一点$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=f(\xi)\tan(1-\xi)$成立.

证：设$F(x)=f(x)\sin(1-x)$, 则$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，

且$F(0)=f(0)\sin 1=0, F(1)=f(1)\sin 0=0$

$F'(x)=f'(x)\sin(1-x)-f(x)\cos(1-x)$, 由罗尔定理得，

至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得$F'(\xi)=0$, 即$f'(\xi)\sin(1-\xi)-f(\xi)\cos(1-\xi)$,

也即$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)\cos(1-\xi)}{\sin(1-\xi)}=f(\xi)\tan(1-\xi)$, 命题得证.