



2021 年山东专升本高等数学 (三) 真题及答案

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 函数 $f(x) = \ln(2-x)$ 的定义域 ()

- A. $[2, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, 2]$ **D. $(-\infty, 2)$**

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = 1$, 则 $a =$ ()

- A. 0 B. 1 **C. 2** D. 3

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数是无穷小量的是 ()

- A. $1 - \sqrt[3]{x}$ **B. $1 - e^x$** C. $1 - \sin x$ D. $1 - \tan x$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x}$, 则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的 ()

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 **C. 无穷间断点** D. 连续点

5. 已知 $y = \tan(3x)$, $dy =$ ()

- A. $3\sec^2(3x)dx$** B. $3\tan(3x)\sec(3x)dx$ C. $\sec^2(3x)dx$ D. $\tan(3x)\sec(3x)dx$



6. 函数 $f(x) = e^x - 5x$ 的单调增区间是 ()
- A. $(-\infty, \ln 5)$ B. $(-\infty, \ln 5]$ **C. $[\ln 5, +\infty)$** D. $(\ln 5, +\infty)$
7. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} = ()$
- A. 0** B. 1 C. 2 D. $+\infty$
8. 已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则 $\int f(3x+2)dx = ()$
- A. $F(3x+2) + C$ B. $3F(3x+2) + C$ C. $\frac{1}{2}F(3x+2) + C$ **D. $\frac{1}{3}F(3x+2) + C$**
9. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $g(x) > f(x) > 0$, 下列不成立的是 ()
- A. $\int_0^1 g^2(x)dx > \int_0^1 f^2(x)dx$ B. $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 g(x)dx$
- C. $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx < \int_0^1 \frac{1}{g(x)}dx$** D. $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx > \int_0^1 \frac{1}{g(x)}dx$
10. 已知 $y = (2+x^2)^x$, 则 $y' = ()$
- A. $(2+x^2)^x [\ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2}]$** B. $2x^2(2+x^2)^{x-1}$
- C. $\ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2}$ D. $(2+x^2)^x [\ln(2+x^2) + \frac{x}{2+x^2}]$

第 II 卷

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = e^x$, 则 $f[g(0)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$

12. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 3$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3a_n + 2b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 12

13. $f(x) = 2^x + x + 3$, 则 $f''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\ln^2 2 \cdot 2^x$

14. $\int_0^2 f(x)dx = 2$, $\int_0^2 f(x)dx = 5$, 则 $\int_4^2 f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -3



三、计算题 (本大题共 7 小题, 每小题 6 分, 共 42 分)

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} \right)$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+2}{x^2+2x} - \frac{x+2}{x^2+2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$.

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{a}}, & x > 0 \\ 2b-e, & x = 0 \\ b + \ln(1+x^2), & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求实数 a 和 b 的值.

【答案】 $a=1, b=e$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [b + \ln(1+x^2)] = b$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{ax}} = e^1 = e$, $f(0) = 2b - e$.

连续, 所以 $a=1, b=e$.

18. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^4}{x-\sin x}$.

【答案】 6

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^4}{x-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^4}{\frac{1}{6}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\frac{1}{6}} = 6$.

19. 求 $y = \arctan(1+x)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处的切线方程和法线方程.

【答案】 切线方程 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$, 法线方程 $y = -2x + \frac{\pi}{4}$

【解析】 $y' = \frac{1}{1+(1+x)^2}$, $y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$, 所以切线方程为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$, 法线方程为 $y = -2x + \frac{\pi}{4}$.

20. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x^2y} = x - y$ 确定, 求 y' .

【答案】 $y' = \frac{1-2xye^{x^2y}}{1+x^2e^{x^2y}}$



【解析】两边同时求导 $e^{x^2y}(2xy+x^2y')=1-y'$ ，整理得到 $y'=\frac{1-2xye^{x^2y}}{1+x^2e^{x^2y}}$ 。

21. 求不定积分 $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx$ 。

【答案】 $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C$

【解析】 $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx^2 - \int \frac{3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C$ 。

22. 求定积分 $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} dx$ 。

【答案】 2

【解析】 令 $\sqrt{x-1}=t$ ，则 $x=t^2+1$ ， $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} dx = \int_0^1 2te^t dt = \int_0^1 2tde^t = 2te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t 2dt = 2e - 2e^t \Big|_0^1 = 2$ 。

四、应用题（本大题共 2 小题，第 23 题 6 分，第 24 题 7 分，共 13 分）

23. 求 $y=\sin x (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi)$ ， $y=\cos x (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 与 x 轴围成图形的面积。

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sqrt{2}$ 。

24. 设 $k>0$ ，求函数 $f(x)=2\ln(1+x)+kx^2-2x$ 的极值点，并判断是极大值点还是极小值点。

【答案】 当 $0<k<1$ 时， $x=0$ 为极大值点， $x=\frac{1-k}{k}$ 是极小值点，当 $k>1$ 时， $x=\frac{1-k}{k}$ 为极大值点

是极小值点，当 $k=1$ 时，无极值点。

【解析】 $f(x)$ 的定义域 $(-1, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{2}{1+x} + 2kx - 2 = \frac{2x(kx+k-1)}{1+x}$ ，

令 $f'(x)=0$ ，得 $x_1=0$ ， $x_2=\frac{1-k}{k}$ 。



列表:

$x \ (k=1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	非极值	$\nearrow$

综上, 当 $0 < k < 1$ 时, $x=0$ 为极大值点, $x=\frac{1-k}{k}$ 是极小值点, 当 $k > 1$ 时, 极小值点, 当 $k=1$ 时, 无极值点.